

*hình.1.* tay máy một khâu đàn hồi

Khi chưa biến dạng khâu là một thanh thẳng

Trong đó ta có các ký hiệu:  $XOY$ : Hệ quy chiếu cố định;  $X_1O_1Y_1$ : hệ quy chiếu gắn với khâu một;  $r_{1j}$ : Véc tơ xác định từ  $O_1$  tới phần tử thứ  $j$  trên hệ  $X_1O_1Y_1$ ;  $r_{01j}$ : véc tơ từ  $O$  tới phần tử thứ  $j$  trên hệ  $XOY$ ;  $r_1$ : Véc tơ từ  $O_1$  đến điểm cuối khâu trong hệ  $X_1O_1Y_1$ ;  $r_{01}$ : Véc tơ từ  $O$  đến điểm cuối của khâu trong hệ  $XOY$ ;  $q_1(t)$ : góc quay tại  $O$  giữa  $O_1X_1$  và  $OX$ ;  $\tau_1$ : mô men của động cơ;  $\rho_1(kg/m^3)$ ,  $E_1(N/m^2)$ ,  $I_1(m^4)$ : khối lượng riêng, mô đun Young, mô men quán tính diện tích của khâu;  $L_1(m)$ ,  $h_1(m)$ ,  $b_1(m)$ ,  $A_1(m^2)$ : chiều dài, bề rộng, diện tích mặt cắt của khâu;  $I_h(kg.m^2)$ : mô men quán tính động cơ;  $m_p(kg)$ : khối lượng tải trọng tại điểm cuối;  $J_p(kg.m^2)$ : mô men quán tính tải trọng;  $w_i(x_j, t)$ : chuyển vị đàn hồi của phần tử  $j$  với tọa độ  $(x_j, y_j)$  trong hệ  $X_1O_1Y_1$ ;  $N_j(x_j)$ ,  $Q_j(t)$ ,  $\phi_i(x_j)$ ,  $l_j$ : hàm dạng suy rộng trong lý thuyết phần tử hữu hạn, véc tơ chuyển vị đàn hồi, hàm dạng và chiều dài phần tử thứ  $j$ ;  $u_{2j-1}, u_{2j}, u_{2j+1}, u_{2j+2}$ : chuyển vị dài và chuyển vị góc tại điểm đầu và điểm cuối phần tử thứ  $j$ ;  $n_1$ : số phần tử của khâu;  $T_k, P_k, M_k, K_k$ : động năng đàn hồi, thế năng đàn hồi, ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của phần tử thứ  $k$ ;  $T_{dc}, M_{dc}$ : động năng và ma trận độ cứng của motor;  $T_p, M_{pT}$ : động năng và ma trận độ cứng của tải trọng;  $T_1, P_1, M_1, K_1$ : động năng đàn hồi, thế năng đàn hồi, ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của toàn hệ

Tổng chuyển vị đàn hồi của phần tử thứ  $j$  trong hệ  $X_1O_1Y_1$ :

$$w_j(x_j, t) = N_j(x_j)Q_j(t) \quad (1)$$

Trong đó  $N_j(x_j)$ ,  $Q_j(t)$  cho bởi:

$$\begin{cases} N_j(x_j) = [\phi_1(x_j) & \phi_2(x_j) & \phi_3(x_j) & \phi_4(x_j)] \\ Q_j(t) = [u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & u_{2j+2}]^T \end{cases} \quad (2)$$

Với:

$$\phi_1(x_j) = 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}; \phi_2(x_j) = x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}; \phi_3(x_j) = \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}; \phi_4(x_j) = \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \quad (3)$$

Véc tơ  $r_{1j}$  trong hệ  $O_1X_1Y_1$  có dạng:

$$r_{1j} = \begin{bmatrix} (j-1)l_j + x_j \\ w_j(x_j, t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ma trận chuyển  $T_0^1$  từ hệ  $X_1O_1Y_1$  sang hệ  $XOY$ :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Véc tơ tọa độ phần tử thứ  $j$  trong hệ  $OXY$  cho bởi:

$$r_{01j} = T_0^1 r_{1j} = \begin{bmatrix} [(j-1)l_j + x_j] \cos q_1 - w_j(x_j) \sin q_1 \\ [(j-1)l_j + x_j] \sin q_1 + w_j(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vậy ta có véc tơ định vị điểm cuối khâu :

$$r_{01} = T_0^1 r_{1j} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 - u_{2n_1+1} \sin q_1 \\ L_1 \sin q_1 + u_{2n_1+1} \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

## 2.2. Động năng của hệ

Động năng tổng thể của hệ là tổng động năng đàn hồi của tay máy, động năng động cơ và động năng tải trọng :

$$T_1 = T_k + T_{dc} + T_p \quad (8)$$

Động năng đàn hồi của khâu là tổng động năng của các phần tử của khâu:

$$T_k = \sum_{j=1}^{n_1} T_{1j} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2} \dot{Q}_{1j}^T(t) M_{1j} \dot{Q}_{1j}(t) = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_k \dot{Q}_1(t) \quad (9)$$

Trong đó  $T_{1j}$  là động năng của phần tử thứ  $j$  và được tính bởi công thức:

$$T_{1j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial t} \right]^2 dx_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_{01j}}{\partial t} \right] dx_j \quad (10)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{01j}}{\partial t} &= \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \dot{u}_{2j-1} + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \dot{u}_{2j} + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \dot{u}_{2j+1} + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \dot{u}_{2j+2} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{u}_{2j-1} \\ \dot{u}_{2j} \\ \dot{u}_{2j+1} \\ \dot{u}_{2j+2} \end{bmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] \dot{Q}_{1j} \end{aligned}$$

Với  $Q_{1j}$  véc tơ tọa độ suy rộng của phần tử thứ  $j$ :

$$Q_{1j} = \begin{bmatrix} q_1 & u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & u_{2j+2} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$Q_1(t)$  là véc tơ tọa độ suy rộng của cả khâu:

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} q_1 & u_1 & u_2 & \cdot & \cdot & u_{2n_1-1} & u_{2n_1} & u_{2n_1+1} & u_{2n_1+2} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

Trong đó  $u_1, u_2, u_{2n_1+1}, u_{2n_1+2}$  are biến dạng dài và góc quay tại điểm đầu và điểm cuối khâu

Vậy động năng phần tử thứ  $j$  là:

$$\begin{aligned}
 T_{1j} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] dx_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \dot{Q}_{1j}^T \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] \dot{Q}_{1j} dx_j \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \dot{Q}_{1j}^T \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] \dot{Q}_{1j} dx_j = \frac{1}{2} \dot{Q}_{1j}^T \left[ \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] dx_j \right] \dot{Q}_{1j} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{Q}_{1j}^T M_{1j} \dot{Q}_{1j}
 \end{aligned}$$

Trong đó:  $M_{1j} = \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] dx_j$

Ta có  $\frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -[(j-1)l_j + x_j] \sin q_1 - N_j(x_j) Q_j(t) \cos q_1 \\ [(j-1)l_j + x_j] \cos q_1 - N_j(x_j) Q_j(t) \sin q_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -C \sin q_1 - D \cos q_1 \\ C \cos q_1 - D \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T = \begin{bmatrix} -C \sin q_1 - D \cos q_1 & C \cos q_1 - D \sin q_1 \end{bmatrix}$$

Vậy  $\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right] = (-C \sin q_1 - D \cos q_1)^2 + (C \cos q_1 - D \sin q_1)^2 = C^2 + D^2$

Với  $C = [(j-1)l_j + x_j]$ ;  $D = N_j(x_j) Q_j(t)$

Ta có  $M_{1j}(1,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left\{ \left[ [(j-1)l_j + x_j] \right]^2 + \left[ N_j(x_j) Q_j(t) \right]^2 \right\} dx_j$

Trong đó:  $\int_0^{l_j} \left[ [(j-1)l_j + x_j] \right]^2 dx_j = \frac{3j^2 - 3j + 1}{3} l_j^3$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{l_j} \left[ N_j(x_j) Q_j(t) \right]^2 dx_j &= \int_0^{l_j} Q_j^T(t) N_j^T(x_j) N_j(x_j) Q_j(t) dx_j \\
 &= Q_j^T(t) \int_0^{l_j} N_j^T(x_j) N_j(x_j) dx_j Q_j(t)
 \end{aligned}$$

Lại có  $\int_0^{l_j} N_j^T(x_j) N_j(x_j) dx_j = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{410} \begin{bmatrix} 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{410} M_{1j*}$

Vậy

$$\int_0^{l_j} \left[ N_j(x_j) Q_j(t) \right]^2 dx_j = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} \begin{bmatrix} u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & u_{2j+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,1) = \rho_1 A_1 \frac{3j^2 - 3j + 1}{3} l_j^3 + \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} Q^T_j M_{1*} Q^T_j$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,1) = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} \left[ 140(3j^2 - 3j + 1) l_j^2 + Q^T_j M_{1*} Q^T_j \right]$$

Ta có  $\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 \\ \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right] = \phi_1^2(x_j)$$

Vậy  $M_{1j}(2,2) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \phi_1^2(x_j) dx_j = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)^2 dx_j = \frac{13}{35} \rho_1 A_1 l_j$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right] = (-C \sin q_1 - D \cos q_1) (-\phi_1(x_j) \sin q_1) + (C \cos q_1 - D \sin q_1) \phi_1(x_j) \cos q_1$$

$$= C \phi_1 = [(j-1)l_j + x_j] \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)$$

$$M_{1j}(1,2) = M_{1j}(2,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{10j-7}{20} l_j^2$$

$$\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 \\ \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 & \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right] = \phi_2^2(x_j)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(3,3) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right)^2 dx_j = \rho_1 A_1 \frac{l_j^3}{105}$$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right] = C \phi_2 = [(j-1)l_j + x_j] \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,3) = M_{1j}(3,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{5j-3}{60} l_j^3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} &= \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 \\ \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 & \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right] = \phi_3^2(x_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_{1j}(4,4) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)^2 dx_j = \rho_1 A_1 \frac{13}{35} l_j$$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right] = C\phi_3 = [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,4) = M_{1j}(4,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{10j-3}{20} l_j^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} &= \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 & \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \right] = \phi_4^2(x_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_{1j}(5,5) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right)^2 dx_j = \rho_1 A_1 \frac{l_j^3}{105}$$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \right] = C\phi_4 = [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,5) = M_{1j}(5,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \left( -\frac{5j-2}{60} l_j^3 \right)$$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right] = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 \\ \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_1(t)\phi_2(t) = \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right)$$

$$M_{1j}(2,3) = M_{1j}(3,2) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{11}{210} l_j^2$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 \\ \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_1(t) \phi_3(t) = \left(1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right)$$

$$M_{1j}(2,4) = M_{1j}(4,2) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{9}{70} l_j$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_1(t) \phi_4(t) = \left(1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right)$$

$$M_{1j}(2,5) = M_{1j}(5,2) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \left(\frac{-13}{420}\right) l_j^2$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 & \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 \\ \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_2(t) \phi_3(t) = \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right)$$

$$M_{1j}(3,4) = M_{1j}(4,3) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{13}{420} l_j^2$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 & \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_2(t) \phi_4(t) = \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right)$$

$$M_{1j}(3,5) = M_{1j}(5,3) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \left(-\frac{1}{140}\right) l_j^3$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \right] &= \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 & \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\ &= \phi_3(t) \phi_4(t) = \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right) \end{aligned}$$

$$M_{1j}(4,5) = M_{1j}(5,4) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \left( -\frac{11}{210} \right) l_j^2$$

Ma trận khối lượng của phần tử thứ  $j$ :

$$M_{1j} = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} \begin{bmatrix} 140l_j^2(3j^2 - 3j + 1) + Q_j^T M_{1*} Q_j^T & 21l_j(10j - 7) & 7l_j^2(5j - 3) & 21l_j(10j - 3) & -7l_j^2(5j - 2) \\ 21l_j(10j - 7) & 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 7l_j^2(5j - 3) & 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 21l_j(10j - 3) & 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -7l_j^2(5j - 2) & -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Có thể viết dưới dạng:

$$M_k = \sum_{j=1}^{n_1} M_{1j} \quad (14)$$

$T_{dc}$  có thể viết dưới dạng ma trận:

$$T_{dc} = \frac{1}{2} I_h \dot{q}_1^2(t) = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_{dc} \dot{Q}_1(t) \quad (15)$$

Trong đó:

$$M_{dc} = \begin{bmatrix} I_h & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Động năng của tải trọng cho bởi:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \left[ \frac{\partial r_{01}}{\partial t}(l, t) \right]^2 + \frac{1}{2} J_p (\dot{q}_1 + \dot{u}_{2n_1+2})^2 = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_{pT} \dot{Q}_1(t) \quad (17)$$

Trong đó:

$$M_{pT} = \begin{bmatrix} m_p L_1^2 + J_p & 0 & . & m_p L_1 & J_p \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . \\ m_p L_1 & . & 0 & m_p & 0 \\ J_p & 0 & . & 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (18)$$



Thay vào (8) tổng động năng của hệ là:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_1 \dot{Q}_1(t) \quad (19)$$

Trong đó:

$$M_1 = M_k + M_{dc} + M_{pT} \quad (20)$$

### 2.3. Tổng thế năng đàn hồi của hệ

Thế năng tổng thể của hệ là tổng thế năng đàn hồi, thế năng động cơ và thế năng tải trọng :

$$P_1 = \sum_{j=1}^{n_1} P_{1j} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2} Q_{1j}^T(t) K_{1j} Q_{1j}(t) = \frac{1}{2} Q_1^T(t) K_1 Q_1(t) \quad (21)$$

Trong đó:

$$P_{1j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} E_1 I_1 \left[ \frac{\partial^2 w_j(x_j, t)}{\partial x_j^2} \right]^2 dx_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} E_1 I_1 \left[ \frac{\partial^2 N_{1j}(x_j) Q_{1j}(t)}{\partial x_j^2} \right]^2 dx_j = \frac{1}{2} Q_{1j}^T(t) K_{1j} Q_{1j}(t) \quad (22)$$

Với  $K_{1j}$  là ma trận độ cứng của phần tử thứ  $j$ :

$$K_{1j} = \frac{E_1 I_1}{l_j^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l_j & -12 & 6l_j \\ 0 & 6l_j & 4l_j^2 & -6l_j & 2l_j^2 \\ 0 & -12 & -6l_j & 12 & -6l_j \\ 0 & 6l_j & 2l_j^2 & -6l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Ma trận độ cứng tổng thể cho bởi:

$$K_1 = \sum_{j=1}^{n_1} K_{1j} \quad (24)$$

### 2.3. Hệ phương trình động lực

Hệ phương trình chuyển động của cơ cấu tay máy một khâu đàn hồi được thiết lập bằng phương pháp Lagrange với hàm  $L = T - P$ , véc tơ tọa độ suy rộng  $Q_1(t)$  véc tơ tải trọng ngoài  $F_1 = [\tau_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ . Hệ phương trình có dạng :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{Q}_1} \right) - \frac{\partial L_1}{\partial Q_1} = F_1 \quad (25)$$

Xét hệ có cản, hệ phương trình dao động trở thành:

$$M_1 \ddot{Q}_1(t) + D_1 \dot{Q}_1(t) + K_1 Q_1(t) = F_1(t)$$

Trong đó  $D_1$  là ma trận cản:

$$D_1 = \alpha M_1 + \beta K_1 \quad (26)$$

Với  $\alpha, \beta$  là hệ số cản của khâu.

## 2.4. Điều kiện biên

Ta xét hệ tay máy là một phần tử:  $n_1 = 1, j = 1$ . Điểm đầu của khâu gắn chặt với động nên ta có chuyển vị dài và chuyển vị góc là bằng không khi gắn với hệ  $OX$ . Bởi vậy  $u_1 = 0, u_2 = 0$ .

Sử dụng điều kiện biên ta có ma trận khối lượng và ma trận độ cứng trở thành:

$$M_1 = \begin{bmatrix} (140L_1^2 + Q_j^T M_{1*} Q_j^T) + I_h + m_p L_1^2 + J_p & 147S_1 L_1 + m_p L_1 & -21S_1 L_1^2 + J_p \\ 147S_1 L_1 + m_p L_1 & 156S_1 + m_p & -22S_1 L_1 \\ -21S_1 L_1^2 + J_p & -22S_1 L_1 & 4S_1 L_1^2 + J_p \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$K_1 = \frac{E_1 I_1}{L_1^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L_1 \\ 0 & -6L_1 & 4L_1^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Và véc tơ tọa độ suy rộng và lực suy rộng cho bởi:

$$\begin{cases} Q_1(t) = [q_1(t) \quad u_3(t) \quad u_4(t)]^T \\ F_1(t) = [\tau_1(t) \quad 0 \quad 0]^T \end{cases} \quad (29)$$

Với  $D_1 = \alpha M_1 + \beta K_1$

Lấy  $\alpha = 3.2; \beta = 0.00005$

Vậy phương trình động lực miêu tả chuyển động của tay máy một khâu đàn hồi có dạng ma trận như sau:

$$M_1 \ddot{Q}_1(t) + D_1 \dot{Q}_1(t) + K_1 Q_1(t) = F_1(t) \quad (30)$$

## 3. Kết luận

Báo cáo này, tác giả trình bày mô hình toán học cho robot có khâu đàn hồi chuyển động quay dựa trên mô hình dầm Euler – Bernoulli và phương pháp phần tử hữu hạn. Hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có được nhờ phương trình Lagrange loại 2. Mô hình toán học này là cơ sở quan trọng để giải quyết các bài toán tiếp theo như động lực học thuận, động lực học ngược và điều khiển.

## Tài liệu tham khảo

- [1] M.O. Tokhi, Z. Mohamed and M.H. Shaheed, *Dynamic characterization of a flexible manipulator system*. Robotica / Volume 19 / Issue 05 / September 2001, pp 571 – 580.
- [2] K.Y. Kuo, J.Lin, *Fuzzy logic control for flexible link robot arm by singular perturbation approach*. Applied Soft Computing 2 (2002) 24–38.

- [3] B. Subudhi, A.S. Morris, *Dynamic modelling\_simulation and control of a manipulator with flexible links and joints*, Robotics and Autonomous Systems 41 (2002), 257–270.
- [4] Victor Gavriloiu, *Design of dynamic nonlinear control techniques for flexible link manipulator*, Thesis submitted for the degree of master of applied Science, Concordia University Montreal, Quebec, Canada (2005).
- [5] Yuan-Gang Tang, Fu-Chun Sun, Zeng-Qi Sun, and Ting-Liang Hu, *Tip Position Control of a Flexible-Link Manipulator with Neural networks*, International Journal of control automation and systems (2006), vol.4, No.3, Pg 308-317.
- [6] J. Becedas, V. Feliu and H.Sira-Ramirez, *GPI Control for a Single-Link Flexible manipulator*, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science (2007), San Francisco, USA.